$a \geq 1$

$u_n \leq \frac{n^\alpha}{2^n}$ CV

$0 < a < 1$

$(1+a)$

$(1+a^n) \to C$

$u_n = O(n^\alpha)$

Séries : révisions et compléments

1er septembre 2018

1 Sur les séries à termes positifs

1.1 Pratique

Donner la nature des séries de terme général :

a.
$$u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

b.
$$u_n = 1 - \tanh(n)$$

c.
$$u_n = \exp(\lambda(1 + 1/2^\alpha + \cdots + 1/n^\alpha))$$

d.
$$u_n = (1 - \frac{1}{n^k})^n$$

e.
$$u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, |, a > 0$$

f.
$$u_n = \left(\cosh \frac{a}{n}\right)^{-n^3}$$

a- $u_n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ DV

b- $1 - th_n = 1 - \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = O(e^{-2n})$

$0 < a < 1$

$\ln(1+a^n) \sim a^n$

$\prod 1 + a^k$

c- $\lambda \geq 0$, OK Hyp : $\lambda < 0$

i- si $\alpha > 1$ $u_n \not\to 0$

$\to$ si $\alpha = 1$ $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$

Nature de $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ $\quad u_{n+1}$

$u_n > 0$ $\quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

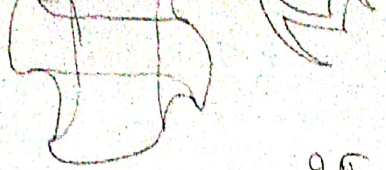
$u_n \searrow 0$ $\quad \ell(e^{-\ell}-1)=0$ $\quad u_n \searrow 0$ $\quad u_{n+1} = u_n(1-u_n+o(1))$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$ $\quad e^{-\ell}=1 \Rightarrow \ell=0$

$u_{n+1}-u_n = -u_n^2$

1.3

On considère la suite $(u_n) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \text{Arc tg} u_n$. Quelle est la nature de $\sum u_n^\alpha$?



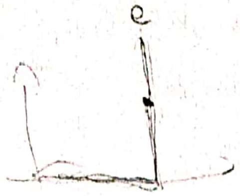
$$u_n = \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)} - \pi^2 u_{n+2}$$

$$\int_0^1 t^{n+1} \sin \pi t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \sin \pi t\right] - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \pi \cos \pi t$$

1.4

$u_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt$. Nature de $\sum u_n^\alpha$.

$$= -\left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \pi \cos \pi t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+2} \pi^2 \sin \pi t}{(n+1)(n+2)}$$



$$u_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t \, dt = [t^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n e^t \, dt$$

$$= e - n u_n$$

u_{n+}

donc $u_n \sim \frac{e}{n}$

Critère spé...

1.5

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles ~~positives~~ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

Que dire de $\sum v_n$ si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent ?

1.6

Soit (u_n) une suite réelle positive.
(i) Montrer que si $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, alors $\sum u_n^\alpha$ converge.
(ii) Si $\sum u_n^2$ converge, que dire de $\sum \frac{u_n}{n}$?
(iii) Si $\sum u_n$ converge, que dire de $\sum u_n \log u_n / \log n$?

$\geq 0 \longrightarrow +\infty$

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{|u_n - \frac{1}{n}| - u_n + \frac{1}{n}}{2}$$

1.7

Montrer que si (u_n) décroît vers 0 et $\sum u_n$ converge nu_n tend vers 0. Que dire de la série de terme général $v_n = \min(u_n, 1/n)$? Et sans l'hypothèse de décroissance ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x}}{x}\,dx \qquad \frac{e^{nx}}{n!} = 0$$

1.8 Intégrales

Nature des séries : $u_n = \int_n^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n+x}dx$, $u_n = \int_a^{+\infty} e^{-(\ln t)^n}\,dt$ $(a \geq 1)$.

$\to a < e$

$$e^{-\ln(t)^n} \geqslant e^{-1}$$

$$\int_a^{+\infty} e^{-\ln(t)^n}\,dt \geqslant \int_a^{e} \frac{1}{e}\,dt = cste > 0$$

$$\to a > e : \quad \cancel{u_{n+2} = \int_a^{+\infty} e^{-(\ln t)^n(\ln t)^2} \leqslant e^{-(\ln(a))^n} \int_a^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\,dt} = e^{-(\ln a)^n} u_n$$

$$u_{n+2} = \int_a^{+\infty} e^{-(\ln t)^n (\ln t)^2}\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} e^{-\lambda^n(\ln t)^2}\,dt \qquad (\lambda = \ln a) > 1$$

$$u_{n+2} \leqslant \int_{(\ln a)^2}^{+\infty} e^{-\lambda^n u} \frac{e^{\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\,du \leqslant \frac{1}{2\lambda} \int_{\lambda^2}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^n}{2}u}\,du$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$\sum \ln k > e^{n\ln(n+1)-n}$ $\frac{(n+1)^n}{e^n}$ // e^{n+1} $\left(\frac{n}{n+2}\right)$ //

$n!(n+1) > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1)$ $\sum \ln k - n\ln(n+1) - n$

$> \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+1}$ $\sum \ln k = n\ln(n+1)$

$\frac{e}{n+2}\left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n n+1\right) > 1$

1.9 Inégalité de Carlemann

Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. On pose $b_n = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n! > (\frac{n+1}{e})^n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n \leq e \times \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)}$ puis que la série de terme général $\frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n(n+1)}$ converge.

c) Montrer que la série $\sum b_n$ converge et que $\sum_{j=1}^\infty b_j \leq e \sum_{j=1}^\infty a_j$.

$$u_{n,k} = \begin{cases} \frac{ka_k}{n(n+1)} = ka_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{k\}$, $\sum_{(n,k)\in I_k}$

2 Séries alternées

2.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier les suites $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$; $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(e-(1+\frac{1}{n})^n)$; $u_n = \cos(\pi n^2/(2n^2 + an + 1))$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = F(0) + F'(0)\frac{1}{n} + \frac{F''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

DV

CV

2.2

Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} F(\frac{1}{n})$ et $\sum_{n\geq 1}(-1)^n F(\frac{1}{n})$ où F est une fonction numérique de classe C^2.

Taylor

2.3

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \tan(n!\pi e)$.

$$I\,n\,\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n.n!} \quad : \alpha_n \in]0,1[$$

DL

$$u_n = (-1)^n \tan\left(\frac{\alpha_n \pi}{n}\right)$$

$$= \underbrace{(-1)^n \frac{\alpha_n \pi}{n}}_{CV} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2.4

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

$2^\alpha > N$

3.3

Montrer que la série des inverses des nombres premiers $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

$$\prod_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = \prod_{k=0}^{N} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \geq \prod_{k=0}^{N} \left(1 + \frac{1}{p_k} \dots \frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)$$

$$\geq \sum_{\alpha_k \leq \alpha} \frac{1}{p_0^{\alpha_0} \dots p_N^{\alpha_N}}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k} \to +\infty$$

$$\cancel{\prod_{k=0}^{N}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) \quad \prod^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \sum^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

donc $\log\left(\prod_{0}^{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)\right) \to +\infty$

$$-\sum_{k=0}^{N} \log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \to +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_k} + o\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

Ex: Soit

$u_n \begin{cases} u_n = 0 & \text{si } 9 \text{ apparait dans le DD de } N \\ u_n = \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

3.4

Soit u_n une suite strictement positive, et un réel $a > 0$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + v_n$$

où $\sum |v_n|$ converge. il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$u_n \sim \frac{C}{b^a}.$$

5 Critère de Cauchy, HP

5.1 Multiplicateurs

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer successivement :
(i) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{U_n}$ diverge.
(ii) Si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{u_n}{U_n^\alpha}$ converge.

$U_n \to +\infty \Rightarrow \frac{u_n}{U_n} = o(u_n)$

$\leq \frac{U_{n+p} - U_{n-1}}{U_n^\alpha}$

$\sim \frac{U_{n+p}}{U_n^\alpha} - \frac{1}{U_n^{1-\alpha}}$

Mq $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{U_n}$ DV

On regarde $\frac{u_n}{U_n} + \dots + \frac{u_{n+p}}{U_{n+p}} \geq \underbrace{\frac{u_n + \dots + u_{n+p}}{U_{n+p}}}$

$\frac{U_{n+p} - U_{n-1}}{U_{n+p}}$

$= 1 - \frac{U_{n-1}}{U_{n+p}}$

pour p assez grand $\frac{u_n}{U_n} + \dots + \frac{u_{n+p}}{U_{n+p}} \geq \frac{1}{2}$

nég du crit de Cauchy

$\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{dt}{t^\alpha}$;

$\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{U_n^\alpha}(U_n - U_{n-1}) = \frac{u_n}{U_n^\alpha}$

$\int_{U_n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge cv $\sum$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_m V_m - \varepsilon_n V_{n-1}$$

$$M = \sup_{k \geq 0} |V_k| \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k v_k\right| \leqslant \varepsilon_m M + \varepsilon_n M + M \sum_{k=n-1}^{m} \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \leqslant 2\varepsilon_n M$$

OK

5.2 18-19

Soit $\sum u_n$ une série telle, pour toute suite convergente v_n, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument.

6.1

Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$. Nature de $\sum \frac{e^{inx}}{n^{\alpha}}$.

$$\alpha\left(\sum_N^{M-1} n(a_n) - \sum_{k=N}^{N-1}(V_k - V_{k-1})a_k\right.$$

$$= \sum_1$$

6.2

Soient $\sum a_n$ une série divergente à termes positifs et décroissants, ε_n une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $\sum \varepsilon_n a_n$ converge. Montrer que 0 est valeur d'adhérence de $\frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$.

$\mathrm{Adh}(u_n)$ est fermé donc $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Adh}(u_n)$ est ouvert

$\longrightarrow \exists \alpha > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \underbrace{\frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)}_{u_n} \notin [-\alpha, \alpha]$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n+1}) - \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) + \frac{1}{n+1}\varepsilon_{n+1} \longrightarrow 0$$

d'un seul côté de

de là tous les (u_n) sont ...

Posons $\forall n \geq N \; \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \geq n\alpha$

$$\sum_1^N \varepsilon_n a_n = \sum_1^N (n u_n - (n-1)u_{n-1})a_n = \sum_1^M n u_n a_n - \sum_1^M (n-1)u_{n-1}a_n$$

$$= \sum_1^M n u_n a_n - \sum^{M-1} n u_n a_{n-1}$$

$$= M u_N a_N + \sum_1^{M-1} n u_n (a_n - a_{n+1})$$

$$M >> N \quad \sum_1^M \varepsilon_n a_n = M u_M a_M + \sum_1^{N-1} n u_n (a_n - a_{n+1}) + \underbrace{\sum_N n u_n (a_n - a_{n+1})}_{S}$$

$$S \geq \alpha \sum_{n=N}^{M-1} n(a_n - a_{n+1}) = \alpha\left[N a_N + a_{N+1} + \dots + a_{M-1} - (M-1)a_M\right]$$

7.4

Soit $\sum u_n$ une série convergente de l'evn E, et σ une permutation de $\mathbf{N}$ telle que $\sigma(n) - n$ est bornée. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge de même somme que $\sum u_n$.

$\sigma(n)$ quelconque : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$-1 + \underbrace{u_2 + u_4}_{\geq 1/2} - u_3 + \underbrace{u_8 + u_{10} + \dots + u_{14}}_{\geq 1/2} - u_5 + \underbrace{u_{16} + \dots + u_{30}}_{\geq \frac{1}{2}} - u_7$$

$2^n \to 2^{n+1} - 2$ n ième impair

$\sigma(n) - n$ bornée : $\left| \sum_0^N u_n - \sum_0^N u_{\sigma(n)} \right|$

$\leq M(|u_{N-M}| + \dots + |u_{N+M}|) \to 0$

8 Sommation

8.1

Sommer :

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1},\ \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Sommations IV télescopie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \to 1$

$\sum_{2}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to \log 2$

$\to$ intégrales.

$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\quad \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} t^{2n}$

$(2N+2)\left(-\frac{1}{\ln(N)}\right)$

$= \int_0^1 \frac{t^{2N+2}-1}{-t^2-1}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{-t^2-1}\,dt$ <

$+ \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$e^{2N+2\ln\left(1-\frac{1}{\ln(N)}\right)}$

$2N+2\left(-\frac{1}{\ln(N)}\right)$

$\varepsilon > 0$

$\left(1-\frac{1}{\ln(N)}\right)^{2N+2}$ $\quad \int_0^2 \frac{t^{2N-2}}{1+t^2}\,dt$ $\quad = \int_0^{1-\eta} \frac{t^{2N+2}}{t^2+1}$

$\int_0^{1-\eta} \ldots < \varepsilon$

$- \int_{1-\eta}^{1} \frac{t^{2N+2}}{t^2+1}$

$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{\frac{2}{\pi}N+2}$

e^{-2}

$\int_{1-\eta}^{1} \ldots < \varepsilon$ pour η assez petit.

8.2

Sommer la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4}$

8.3 Variante

Convergence et somme de

$$\sum \frac{u_n}{n(n+1)}$$

où u_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

$$u_n \sim \log n$$

$$A_k = \{n \mid 10^k \leq n < 10^{k+1}\}$$

$$\sum_{n \in A_k} a_n = (k+1) \sum_{n \in A_k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = (k+1)\left(\frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{k+1}}\right)$$

$$\sum_{1}^{+\infty} a_n = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} - \sum_{2}^{+\infty} \frac{k}{10^k}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{19}{90}$$

j'aime les frites

$$v_{n+1} = (n+1)^{\alpha} u_{n+1}$$

$$= n^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)u_{n+1}$$

$$= n^{\alpha}u_{n+1} + \alpha n^{\alpha-1}u_{n+1}$$

$$= v_n \frac{n+a}{n+b}$$

8.4

Soit u_n définie par $u_o = 1$ et $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}u_n$ $(0 < a < b)$. Existe-t-il α tel que $n^{\alpha}u_n$ ait une limite finie non nulle ? Calculer en cas de convergence la somme de la série $\sum u_n$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1} = 1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n \sim \frac{C}{n^{b-a}}$$

$$CV \text{ ssi } b-a > 0$$

somme :

$$\sum_{n=0}^{N}(n+b)u_{n+b} = \sum_{n=0}^{N}(n+a)u_{n+a}$$

télescop

$$(b-1-a)\sum_{n=1}^{N}u_n + \underbrace{(N+b)u_{N+1}}_{\to 0} = a u_0$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \cancel{\frac{[illegible](b-1)}{b-1-a}}$$